

ΜΑΥ611: Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι (2024-25) - Σεπτέμβριος 2025

Ημερομηνία: 23/9/2025

Διάρκεια: 3 ώρες

1. α) Βρείτε όλες τις λύσεις $z \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $e^{\bar{z}-i} = -3 - 3i$.
β) Προσδιορίστε την εικόνα $f(S)$ του συνόλου $S = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) < \frac{3\pi}{4}\}$ κάτω από την απεικόνιση $f(z) = iz^{-2}$. Σχεδιάστε πρόχειρα τα $S, f(S)$. (1 + 1 μον.)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z} \cdot \text{Im}(z)}{|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0. \end{cases}$$

- α) Βρείτε όλα τα σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι συνεχής.
β) Βρείτε όλα τα σημεία $z_0 \in \mathbb{C}$ στα οποία η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη. (1 + 1 μον.)

3. α) Προσδιορίστε τον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο στον οποίο οι παρακάτω δυναμοσειρές συγκλίνουν απόλυτα, και υπολογίστε το άθροισμά τους:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{3-i} \right)^n \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

- β) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \frac{1}{z_0 - z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. (1 + 1 μον.)

4. Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος με κέντρο $z_0 \in D$ και $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ με $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$, όπου γ_z οποιαδήποτε C^1 καμπύλη μέσα στο D με αρχή το z_0 και πέρας το $z \in D$.

- α) Δείξτε ότι η F είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη από την επιλογή της καμπύλης γ_z .

- β) Δείξτε ότι $F' = f$. (1 + 1 μον.)

5. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη γ και υπολογίστε τα ολοκληρώματα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

- α) $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-i)(z^2-1)} dz$, όπου γ η θετικά προσανατολισμένη κλειστή πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $-0.5 + 2i$, $-0.5 - 2i$ και 2 .

- β) $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{4z-3i} + \frac{\text{Log}(z)}{(i-z)^3} dz$, όπου $\gamma(t) = 1 + i + \sqrt{2}e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (1 + 1 μον.)

6. Βρείτε και ταξινομήστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{1 + \cos z}{\sin^2 z}$. (1 μον.)

Αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!